新しい学生さんも来ているので基礎的な内容で、
ただしMIC演題概要もあるので、45～60分ぐらいで

誤差に関するお話し

平成19年4月23日

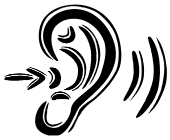
放医研　澁谷憲悟

導　入

測定値と誤差

音速の文献値：331 m/s

- A氏の測定結果： 329±5 m/s
- B氏の測定結果： 325±5 m/s
- X氏の測定結果： 345±2 m/s
- Y氏の測定結果： 345±15 m/s



誤差の伝播　和と差（仮）

Propagation of Error

pの測定値が、$p_{best}\pm\delta q$
qの測定値が、$q_{best}\pm\delta q$
のとき、p-qの誤差は？

両方の誤差が同時に最大になる確率は小さいのではないだろうか？

最大値：　$(p_{best}-q_{best})+(\delta p+\delta q)$
最小値：　$(p_{best}-q_{best})-(\delta p+\delta q)$

※ただし、統計的な観点からは、もっと厳密に取り扱う必要がある。

誤差の伝播　積と商（仮）

pの測定値が、$p_{\text{best}}\pm\delta q$
qの測定値が、$q_{\text{best}}\pm\delta q$
のとき、$p\times q$の誤差は？

積や商の場合は、相対値で規格化すると、計算に便利。

$$\left(p_{best}\pm\delta p\right)\left(q_{best}\pm\delta q\right)$$
$$=p_{best}\left(1\pm\frac{\delta p}{\left|p_{best}\right|}\right)q_{best}\left(1\pm\frac{\delta q}{\left|q_{best}\right|}\right)$$
$$=p_{best}q_{best}\left(1\pm\frac{\delta p}{\left|p_{best}\right|}\pm\frac{\delta q}{\left|q_{best}\right|}+\frac{\delta p\delta q}{\left|p_{best}q_{best}\right|}\right)$$

最大値：$p_{best}q_{best}\left(1+\frac{\delta p}{|p|}+\frac{\delta q}{|q|}\right)$

最小値：$p_{best}q_{best}\left(1-\frac{\delta p}{|p|}-\frac{\delta q}{|q|}\right)$

誤差の伝播　まとめ（仮）

いくつかの物理量$\left(x_1,x_2,\ldots,x_n,y_1,y_2,\ldots,y_m\right)$を測定して、
それぞれの誤差が$\left(\delta x_1,\delta x_2,\ldots,\delta x_n,\delta y_1,\delta y_2,\ldots,\delta y_m\right)$であるとき、

$s=\left(x_1+x_2+\ldots+x_n\right)-\left(y_1+y_2+\ldots+y_m\right)$の誤差は、
$\delta s=\delta x_1+\delta x_2+\ldots+\delta x_n+\delta y_1+\delta y_2+\ldots+\delta y_m$であり、

和と差は誤差の絶対値で足し合わせる。

$t=\dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{y_1+y_2+\ldots+y_m}$の誤差は、

$\delta t=\dfrac{\delta x_1}{|x_1|}+\dfrac{\delta x_2}{|x_2|}+\ldots+\dfrac{\delta x_n}{|x_n|}+\dfrac{\delta y_1}{|y_1|}+\dfrac{\delta y_2}{|y_2|}+\ldots+\dfrac{\delta y_m}{|y_m|}$である。

積と商は誤差の相対値で足し合わせる。

誤差の伝播　仮まとめ（続き･･･）

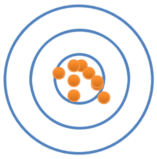
先ほどの例で、$x_1 = x_2 = \ldots = x_n$, $\delta x_1 = \delta x_2 = \ldots = \delta x_n$の場合を考えることにより、

定数倍（c倍、cに誤差はないものとする）について、
$t' = c \times x_1$の誤差は、
$\delta t' = |c| \times \delta x_1$であり、

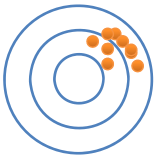
べき乗（b乗、bに誤差はないものとする）について、
$s' = x_1^b$の誤差は、
$\delta s' = b \dfrac{\delta x_1}{|x_1|}$である。

ランダム誤差

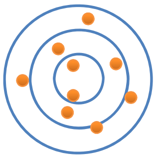
系統誤差とランダム誤差



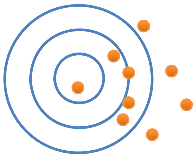
ランダム誤差： 小
系統誤差： 小



ランダム誤差： 小
系統誤差： 大



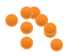
ランダム誤差： 大
系統誤差： 小



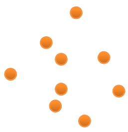
ランダム誤差： 大
系統誤差： 大

系統誤差とランダム誤差？

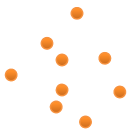
ランダム誤差： 小
統計誤差： ？



ランダム誤差： 小
統計誤差： ？



ランダム誤差： 大
統計誤差： ？

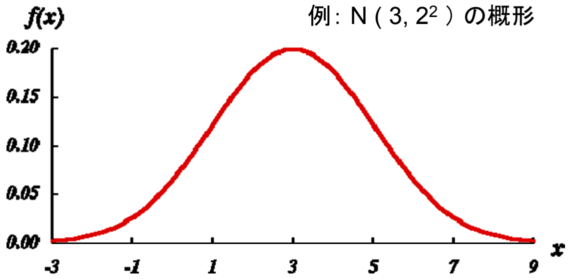


ランダム誤差： 大
統計誤差： ？

ゼロ点？
視差？

正規分布（ガウシアン）
error function

- 系統誤差が無視できる場合、ランダム誤差を含む測定値は、正規分布に従うことが知られている。



$$N\left(\mu,\sigma^2\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{\frac{-z^2}{2}\right\}, z=\frac{x-\mu}{\sigma}$$

前置①　測定値xと固定値Aの和（差）

$s=x+A$の分布を求める。

$$P\left(x\right)=N\left(\mu,\sigma^2\right)=c\exp\left\{-\frac{\left(x-\mu\right)^2}{2\sigma^2}\right\}$$とすると、

$$P\left(x=s-A\right)=c\exp\left\{-\frac{\left(s-A-\mu\right)^2}{2\sigma^2}\right\}=N\left(\mu+A,\sigma^2\right)$$

であり、確かに、元の正規分布の平行移動として表される。

前置② 測定値xと固定値Bの積(商)

$t=Bx$の分布を求める。

$P(x)=N(\mu,\sigma^2)=c\exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$とすると、

$$P\left(x=\frac{t}{B}\right)=c\exp\left\{-\frac{\left(t/B-\mu\right)^2}{2\sigma^2}\right\}=c\exp\left\{-\frac{(t-B\mu)^2}{2B^2\sigma^2}\right\}$$

$$=N\left(B\mu,B^2\sigma^2\right)$$

となる。

※図を板書すること

測定値xと測定値yの和

簡単のため、

$$P(x)=N\left(0,\sigma_x^2\right)=c_1\exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right\}$$

$$P(y)=N\left(0,\sigma_y^2\right)=c_2\exp\left\{-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right\}$$

と仮定すると、

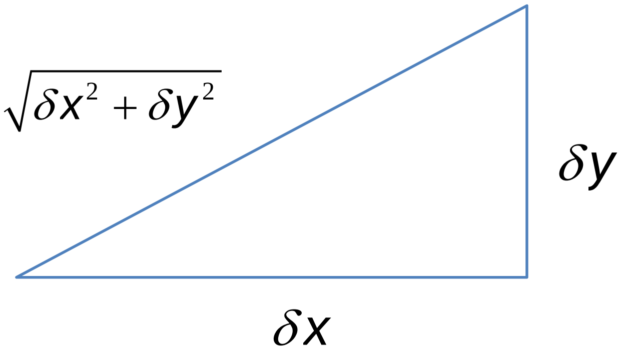
$$P(x,y)=c_1\exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right\}\times c_2\exp\left\{-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right\}$$

$$=c_3\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2\sigma_x^2}+\frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right)\right\}$$

$$=c_3\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{(x+y)^2}{2\left(\sigma_x^2+\sigma_y^2\right)}-\frac{z^2}{2}\right\}dz$$

$$=N\left(0,\sqrt{\sigma_x^2+\sigma_y^2}\right)$$

まとめ



ランダム誤差の要因が独立である場合に限り、
二乗和を用いて評価して良い。

一般的に、$\sqrt{\delta x^2 + \delta y^2} \le \delta x + \delta y$が成り立つ。

ポアソン分布

二項分布

2種類の結果を何度も繰り返し試行する実験で、『成功』する確率をp、『失敗』する確率を$1-p$とするとき、n回中ν回成功する確率は、

$$B_{n,p}(\nu)=\binom{n}{\nu}p^{\nu}(1-p)^{n-\nu}=\frac{n!}{\nu!(n-\nu)!}p^{\nu}(1-p)^{n-\nu}$$

である。

この時、成功回数の期待値は、

$$\bar{\nu}=np$$

であり、νの標準偏差は、

$$\sigma_{\nu}=\sqrt{np(1-p)}$$

である。

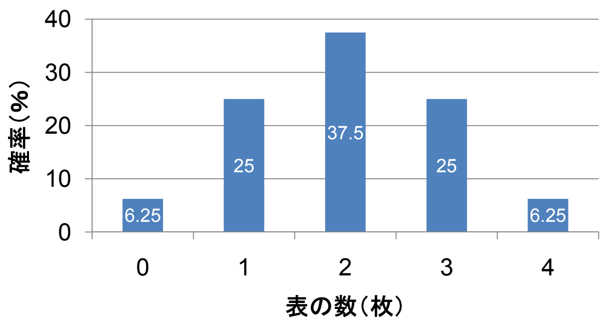
二項分布の計算例

$n=4$のコインを放り上げた時、表が出た枚数νの出現確率。

$$\binom{4}{\nu}\left(\frac{1}{2}\right)^{4}$$

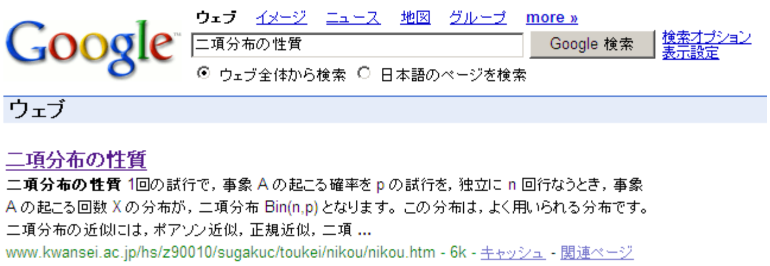
期待値は、$np=4\times\frac{1}{2}=2$であり、

標準偏差は、$\sqrt{np(1-p)}=\sqrt{4\times{}^{1}\!/_{2}\times{}^{1}\!/_{2}}=1$である。



sample

中心極限定理とその物理的意味



二項分布は、試行回数n が十分に大きいとき、ガウス分布で近似できる。目安として、np>5、n(1-p)>5であること。

ポアソン分布

二項分布で、n が十分に大きく、pが十分に小さい場合を、特にポアソン分布という。

	二項分布	ポアソン分布
	$\frac{n!}{\nu!(n-\nu)!}p^{\nu}(1-p)^{n-\nu}$	$e^{-\mu}\frac{\mu^{\nu}}{\nu!}, \mu = np$
期待値	np	$\mu(=np)$
標準偏差	$\sqrt{np(1-p)}$	$\sqrt{\mu}\left(=\sqrt{np}\right)$

※中心極限定理は、ポアソン分布でも同様に成り立ち、ガウス関数で近似することができる。

例題①

およそ1.0 mCi (=37 MBq)程度の放射能と考えられるFDGを
シンチレーション検出器で30秒間測定したところ、
カウント値はmであった。
このとき、計数誤差の範囲は$\sqrt{m}$程度と考えて良いか。
ただし、^{18}Fの半減期は110分とする。

壊変率pは、

$$\frac{0.693}{110\ \mathrm{min}} = \frac{0.693}{6.6\times10^{3}\ \mathrm{sec}} = 1.1\times10^{-4}\ \mathrm{sec}^{-1}$$

試行数（原子核数）nは、

$$\frac{3.7\times10^{7}}{1.1\times10^{-4}} = 3.3\times10^{11}\ (= 0.54\,\mathrm{pmol})$$

したがって、

$$np = 3.7\times10^{7} \gg 5$$

であるから、ポアソン分布に従うので、そのように考えて良い。

例題②

ある放射性物質をt_a秒間測定したところ、計数値はN_aであった。
放射性物質を取り除いて、バックグラウンドをt_b秒間測定した
ところ、計数値はN_bであった。そこで、放射性物質に由来する
計数率を$\left(N_a/t_a\right)-\left(N_b/t_b\right)$とした。誤差はどのように見積もれば
良いだろうか？

計数値はポアソン分布にしたがうと考えて、それぞれの
計数率と誤差の範囲は、

$$\frac{N_a}{t_a}\pm\frac{\sqrt{N_a}}{t_a} \text{ および } \frac{N_b}{t_b}\pm\frac{\sqrt{N_b}}{t_b} \text{ である。}$$

また、それぞれの計測は独立で、誤差はランダムである
と考えられるので、真の計数率の誤差の範囲は、

$$\pm\sqrt{\left(\frac{\sqrt{N_a}}{t_a}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{N_b}}{t_b}\right)^2} = \pm\sqrt{\frac{N_a}{t_a^2}+\frac{N_b}{t_b^2}}$$

である。

発展

PET角度揺動の定量評価における誤差の取り扱い

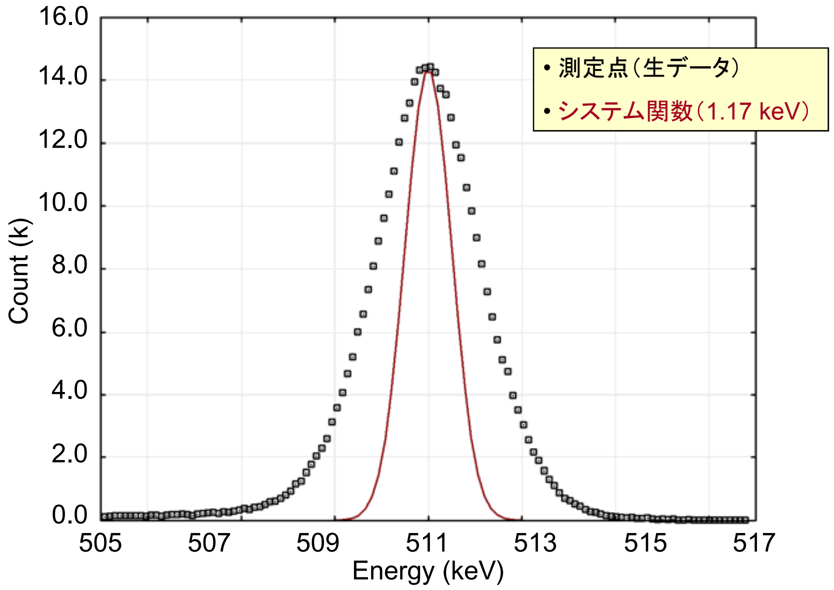
論文の主な結論

FDG-PETのおける生体角度揺動は
0.557±0.013°であり、
これまで言われていた約0.5°よりも有意に大きい。

誤差の原因

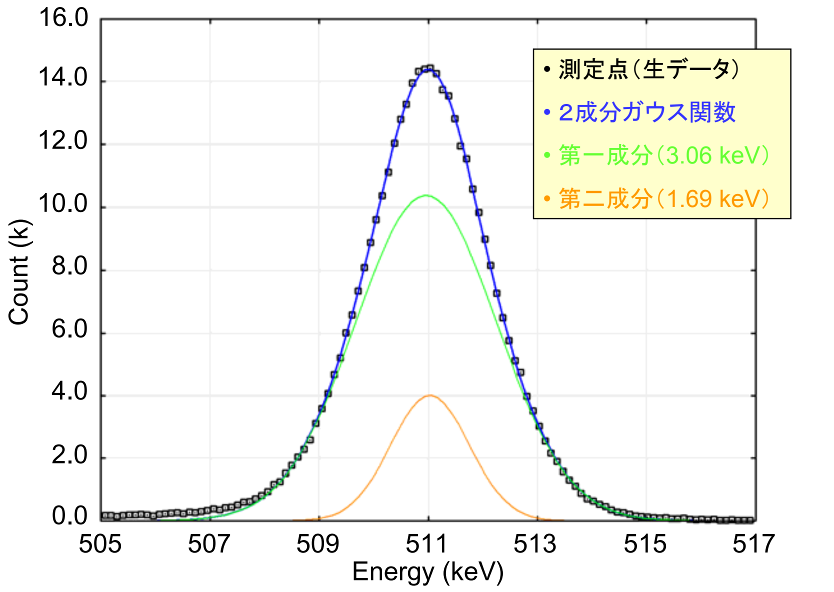
1. Ge半導体検出器のエネルギー分解能(システム関数@511keV)の定量評価における誤差
2. 生体から放出された消滅放射線の光電吸収ピークスペクトルのフィッティングにおける誤差
3. 2の関数を1の関数でデコンボリューションする際の誤差の伝播
4. エネルギー揺動を角度揺動に換算する際の誤差

プールファントム（純水）の光電ピーク



測定値とシステム関数の差が、電子対の運動量によるドップラー効果である。

光電ピークに対するフィッティング（2成分）



低エネルギー側の裾に小角散乱成分が乗っている。

二成分のガウス関数を一成分のガウス関数でデコンボリューションする際の誤差の伝播

デコンボリューションにおいて、以下を自明とする。
(1)デコンボリューションにおいて、加法定理が成り立つ。
(2)標準偏差がσ_1のガウス関数を、標準偏差がσ_2のガウス関数でデコンボリューションすると、その結果得られる関数もガウス関数であり、その標準偏差をσ_3とすると、$(\sigma_3)^2=(\sigma_1)^2-(\sigma_2)^2$の関係が成り立つ。

- システム関数は、一成分のガウス関数で良く近似することができ、その半値幅は1.17±0.01keV (0.74%)であった。
- 光電ピーク形状は、二成分のガウス関数で良く近似することができ、その半値幅はそれぞれ、3.06±0.03keV(0.98%) および、1.69±0.06keV(3.55%)であった。

※図は板書すること。

ブロード成分に関して、

$$FWHM_1 = 3.06 \pm 0.03(0.98\%)$$

$$\therefore (FWHM_1)^2 = 9.36 \pm 0.18(1.96\%)$$

$$FWHM_2 = 1.17 \pm 0.01(0.85\%)$$

$$\therefore (FWHM_2)^2 = 1.37 \pm 0.02(1.70\%)$$

$$\therefore (FWHM_1)^2 - (FWHM_2)^2 = 7.99 \pm 0.18(2.25\%)$$

$$\therefore FWHM_3 = 2.83 \pm 0.04(1.13\%)$$

以下同様に、ナロー成分の誤差伝播を計算し、
それぞれの成分の割合に応じて足し合わせることにより、
デコンボリューションの誤差伝播を見積もる事が出来る。

ガウス関数の理由

1. 分布形状を再現するのが目的であるから、滑らかな関数であれば何でも良い。
2. 理論的(理想的)にはガウス関数である。
3. 誤差伝播の評価(解析)が容易である。

最後に、

種々の量、$x,\ldots,w$を小さな誤差$\delta x,\ldots,\delta w$で測定し、それらを基にある値qを計算する時、ランダムな誤差の伝播は、

⑴qが和と差の形、つまり$q = x + \ldots + z - (u + \ldots + w)$の時は、

$$\delta q = \sqrt{(\delta x)^2 + \ldots + (\delta z)^2 + (\delta u)^2 + \ldots + (\delta w)^2}$$

(2)qが積と商の形、つまり$q = x \times \ldots \times z / (u \times \ldots \times w)$の時は、

$$\delta q = \sqrt{\left(\frac{\delta x}{x}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\delta z}{z}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\delta u}{u}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\delta w}{w}\right)^2}$$

(3)定数Bを掛ける$(q = Bx)$場合は、

$$\delta q = |B|\,\delta x$$

(4)べき乗$(q = x^n)$の場合は、

$$\frac{\delta q}{|q|} = |n|\frac{\delta x}{|x|}$$

だけ知っておけば、後はだいたい何とかなります。(?)